

PRINCIPIUL PARITĂȚII și METODA REDUCERII LA ABSURD

- selecție de probleme pentru clasa a VII-a -

Profesor: SILVIU BOGA, silviumath@yahoo.com

Surse bibliografice utilizate:

1. Matematică - Teme pentru activități opționale la clasele V-VIII, A. Bălăucă și colab., Ed. Thaida
2. Matematică pentru grupele de performanță - clasa a VII-a, V. Pop, V. Lupșor, Ed. Dacia Educațional
3. Matematica gimnazială dincolo de manual, A. Ghioca, L. Cojocaru, Ed. GIL

Cuprins

Principiul parității - probleme de inițiere - enunțuri	pag. 1
Principiul parității - probleme de inițiere - idei de abordare	pag. 3
Principiul parității - probleme rezolvate - enunțuri și soluții	pag. 5
Metoda reducerii la absurd - probleme rezolvate - enunțuri și soluții	pag. 7
Principiul parității - probleme de aprofundare - enunțuri.....	pag.13
Metoda reducerii la absurd - probleme de aprofundare - enunțuri.....	pag.13
Principiul parității - soluții la probleme de aprofundare	pag.14
Metoda reducerii la absurd - soluții la probleme de aprofundare	pag.15
Probleme care implică noțiunea de paritate - probleme comentate	pag.17
Probleme care implică noțiunea de paritate - probleme propuse	pag.26
Probleme care implică noțiunea de paritate – soluții, indicații, răspunsuri	pag.27

PRINCIPIUL PARITĂȚII

Există, în literatura matematică, un tip de probleme care a devenit caracteristic dezvoltării raționamentului corect și prezent în probele competițiilor școlare.

O temă fundamentală a tipului menționat o constituie „Principiul parității”, unde intervine noțiunea de număr par, respectiv, număr impar.

Rezolvarea problemelor din acest capitol este considerată un exercițiu în care spiritul de observație trebuie să vină în ajutorul cititorului.

Exemplificăm această temă prin următoarele probleme:

1. La un concurs interjudețean de matematică, fondul de premiere a fost de 12525 lei. Se pot acorda 60 de premii de valori 525 lei, 325 lei și 125 lei?
2. a) Arătați că suma a două numere naturale consecutive este un număr impar.
b) Demonstrați că 2^n se poate scrie ca o sumă de două numere naturale impare consecutive, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
3. De-a lungul unui gard sunt 8 pruni. Numărul vrăbiuțelor de pe doi copaci vecini diferă cu 1. Se poate ca pe toți copacii împreună să fie 225 de vrăbiuțe?
4. Se pot înlocui stelutele din egalitatea:
 $1 * 2 * 3 * \dots * 100 = 101$ prin semnele „+” sau „-” astfel încât egalitatea să devină adevărată?
5. Într-unul din pătrățelele unei table de șah este scris numărul +1, iar în celelalte -1. Înțelegem prin *mutare* schimbarea tuturor semnelor numerelor dintr-o linie sau dintr-o coloană oarecare. Să se arate că oricâte *mutări* am efectua, nu putem obține +1 în toate pătrățelele tablei.
6. Arătați că dacă produsul a 2006 numere egale cu 1 sau cu -1 este egal cu 1, atunci suma lor nu poate fi zero.
7. Se consideră numerele impare $m, n_1, n_2, \dots, n_m$. Să se demonstreze că printre numerele: $\frac{n_1 + n_2}{2}, \frac{n_2 + n_3}{2}, \dots, \frac{n_{m-1} + n_m}{2}, \frac{n_m + n_1}{2}$ există un număr impar de numere impare.
8. Să se arate că suma a n numere naturale impare consecutive ($n > 1$) nu poate fi un număr prim.

9. Dacă pe o tablă de șah un cal a efectuat 7 salturi, arătați că acesta nu poate ajunge pe pătrățelul inițial. Generalizare.
10. O locomotivă face manevre pe o cale ferată dreaptă în direcții diferite față de punctul de plecare. Prima manevră măsoară 3 m, a doua 5 m, a treia 7 m, a patra 9 m, ș.a.m.d. După 99 de manevre locomotiva poate ajunge în punctul inițial?
11. La al V-lea Concurs internațional al matematicienilor români s-au întâlnit n persoane, dar nu fiecare a dat mâna cu toate celelalte, unii dintre ei fiind certați. Să se arate că numărul celor care au dat mâna de un număr impar de ori este par.
12. În pomul minune grădinarul a făcut să crească 25 de banane și 30 de portocale. În fiecare zi el rupe două fructe și în același timp în pom crește alt fruct. Dacă rupe două fructe de același fel, atunci crește o portocală, iar dacă rupe două fructe diferite, atunci crește o banană. Care este ultimul fruct din acest pom-minune?
13. Un cerc se împarte în 10 sectoare iar în fiecare sector se pune câte o monedă. După un pas este permis ca orice două monede să le mutăm în sectoarele vecine. Să se arate că nu se pot aduna toate monedele în același sector.
14. În tabelul 5×5 se pot scrie numerele 1, 2, 3, ..., 25 astfel încât în fiecare coloană suma unor numere să fie egală cu a celorlalte (din acea coloană)?
(O.M., U.R.S.S., 1990)
15. În tabelul 7×7 se pot scrie numerele 1, 2, 3, ..., 49 astfel încât în fiecare linie suma unor numere să fie egală cu a celorlalte (din acea linie)?
16. Să se demonstreze că nu se pot numerota muchiile unui cub cu numerele 1, 2, 3, ..., 12 astfel încât sumele numerelor corespunzătoare celor trei muchii care ajung în același vârf să fie egale.
(N.N. Constantinov, N.B. Vasiliev, „KVANT” nr. 5/1972)
17. Într-un tabel sunt scrise primele numere naturale nenule în rânduri egale de la stânga la dreapta. Știind că numărul 116 se află pe rândul de la mijloc iar în dreptul acestui număr, pe ultimul rând, se află numărul 227, să se afle câte numere conține tabelul.

IDEI DE ABORDARE

1. Nu se poate. Suma unui număr par de numere impare este pară, dar numărul 12525 este impar, contradicție.
2. a) $2k + 2k + 1 = 4k + 1, \forall k \in \mathbb{N}$. b) $2^n = 2^{n-1} + 2^{n-1} = (2^{n-1} - 1) + (2^{n-1} + 1)$.
3. Nu. Numărul păsărilor de pe doi copaci vecini diferind prin 1, pe doi copaci alăturați împreună se află un număr impar de păsări. Atunci numărul total de păsări este egal cu suma a patru numere impare, deci numărul este par, adică 225 este par, absurd.
4. Nu se poate. Dacă toate stelutele sunt înlocuite cu plusuri, suma va fi egală cu 5050. Dacă înlocuim acum câteva plusuri prin minusuri, expresia inițială: $1 + 2 + 3 + \dots + 100$, se va micșora cu un număr par, deci nu va putea deveni niciodată un număr impar.
5. Oricâte *mutări* am efectua, paritatea numerelor de semne $+$ de pe tablă nu se schimbă și cum produsul tuturor numerelor de pe tablă este egal cu -1 , etc.
6. Numărul factorilor produsului egali cu -1 este par. Dacă suma celor 2006 de numere este zero, atunci trebuie să avem același număr de termeni egali cu 1 și cu -1 , deci am avea 1003 termeni egali cu -1 , contradicție.
7. Să presupunem că printre numerele $\frac{n_1 + n_2}{2}, \frac{n_2 + n_3}{2}, \dots, \frac{n_m + n_1}{2}$ se află un număr par de numere impare. Atunci suma lor: $\frac{n_1 + n_2}{2} + \frac{n_2 + n_3}{2} + \dots + \frac{n_m + n_1}{2} = n_1 + n_2 + \dots + n_m$ este un număr par, contradicție.
8. $(2k + 1) + (2k + 3) + \dots + (2k + 2n - 1) = 2nk + [1 + 3 + \dots + (2n - 1)] = 2nk + n^2 = n(2k + n)$ etc.
9. După un număr impar de salturi, calul de pe tabla de șah se află pe un pătrățel de culoare diferită decât culoarea celui inițial, etc.
10. După 99 de deplasări în ambele sensuri, locomotiva parcurge $3 + 5 + 7 + \dots + 199 = 9999$ m. Distanța de 9999 m nu poate fi împărțită în două părți egale astfel încât fiecare parte să fie exprimată printr-un număr natural de metri etc.
11. Când două persoane dau mâna se realizează două strângeri de mână, deci numărul total al strângerilor de mână este par ($2k$). Avem: $p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 2k$, unde p_i reprezintă numărul strângerilor de mână pe care le-a realizat persoana i . Printre cele n persoane, s persoane au realizat fiecare câte un număr par de strângeri de mână și $n - s$ persoane au realizat fiecare câte un număr impar de strângeri de mână. Putem

scrie suma de mai sus: $\underbrace{p_1' + p_2' + \dots + p_s'}_{s \text{ numere pare}} + \underbrace{p_{s+1}' + p_{s+2}' + \dots + p_n'}_{n-s \text{ numere impare}} = 2k$

rezultând că $n - s$ este număr par.

12. Invariantul transformării este numărul impar de banane. Ultimul fruct este banana.

13. Numerotăm sectoarele consecutiv cu numerele de la 1 la 10 și fiecare monedă ia numărul sectorului în care se află. Suma numerelor rămâne impară. Ori dacă s-ar strânge toate monedele în același sector, suma numerelor ar fi $10k$ (k este numărul sectorului), adică număr par, contradicție.

14. Dacă s-ar putea atunci suma tuturor numerelor va fi pară și deci suma tuturor ar fi pară, dar suma tuturor numerelor este $1 + 2 + 3 + \dots + 25 = 25 \cdot 13$ (impar).

15. Se tratează ca la problema 14.

16. Să presupunem că se pot aranja numerele ca în enunț. Să adunăm cele opt astfel de sume corespunzătoare tuturor vârfurilor cubului. În suma obținută de 24 de numere, fiecare din cele 12 numere (1,2,...,12) intră de două ori. Astfel $2(1 + 2 + \dots + 12) = 8s$ de unde $s = \frac{39}{2}$, absurd. Am notat cu s suma dintr-un vârf al cubului.

17. Deoarece în enunț intervine rândul de la mijloc, rezultă că numărul rândurilor din tabel este impar. Fie $2n + 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$) numărul rândurilor din tabel. Pe n rânduri sunt scrise $227 - 116 = 111$ numere. Deci $n/111$ și $n \in \{1, 3, 37, 111\}$.

Dacă $n = 1$, tabelul are 3 rânduri și pe fiecare rând sunt scrise 111 numere, deci tabelul conține 333 numere.

Dacă $n = 3$, tabelul are 7 rânduri și fiecare rând conține câte 37 de numere. În acest caz tabelul conține $37 \cdot 7 = 259$ de numere.

Dacă $n = 37$, tabelul ar avea 75 de rânduri iar fiecare rând ar conține câte 3 numere, adică tabelul ar avea $75 \cdot 3 = 225$ de numere, nu convine. $n = 111$ conduce la faptul că tabelul ar avea 223 de numere, imposibil.

3. Principiul parității

Multe probleme elementare, care de care mai neașteptate, folosesc noțiunea de paritate.

Principiul parității constă în separarea cazurilor pare și impare dintr-o situație. Regulile parității:

- suma a două numere pare este un număr par
- suma a două numere impare este un număr par
- suma dintre un număr par și altul impar este un număr impar
- produsul dintre un număr par și un număr impar este un număr par
- produsul a două numere pare este un număr par
- produsul a două numere impare este un număr impar.

Probleme rezolvate

R3.1. Fie $n \in \mathbf{N}, n > 1$.

Demonstrați că numărul fracțiilor ireductibile din mulțimea $\left\{ \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots, \frac{n-1}{n} \right\}$ este par.

Soluție. Să arătăm că dacă fracția $\frac{k}{n}$ este ireductibilă, atunci și fracția $\frac{n-k}{n}$ este ireductibilă. Dacă fracția $\frac{k}{n}$ este ireductibilă atunci k și n sunt prime între ele.

Să demonstrăm că și $n-k$ și n sunt prime între ele. Folosim metoda reducerii la absurd. Presupunem că există $p \neq 1$ astfel încât $p|n$ și $p|(n-k)$, deci $p|[n-(n-k)]$ adică $p|k$.

Deci $p|n$ și $p|k$, adică n și k nu sunt prime între ele, fals fiindcă $\frac{k}{n}$ este ireductibilă.

Să arătăm că fracțiile $\frac{k}{n}$ și $\frac{n-k}{n}$ sunt diferite. Dacă am avea $\frac{k}{n} = \frac{n-k}{n}$ am obține

$n = k$ și atunci $\frac{k}{n} = \frac{k}{k}$ nu ar mai fi ireductibilă. Deci $\frac{k}{n} \neq \frac{n-k}{n}$. Atunci numărul fracțiilor ireductibile din mulțimea dată este par.

R3.2. La olimpiada de matematică s-au întâlnit n elevi, dar nu fiecare a dat mâna cu toți ceilalți. Să se arate că numărul elevilor care au dat mâna de un număr impar de ori este par.

Soluție. Fie x_i numărul strângerilor de mână pe care le-a realizat elevul cu numărul de ordin i . Când un elev dă mâna cu un alt elev se realizează două strângeri de mână, deci numărul total al strângerilor de mână este par, adică

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 2s \quad ()$$

Printre cei n elevi sunt k elevi care au realizat fiecare câte un număr par de strângeri de mână și $n-k$ elevi care au realizat fiecare câte un număr impar de strângeri de mână.

Atunci (1) se mai poate scrie:

$$\underbrace{x'_1 + x'_2 + \dots + x'_k}_{k \text{ numere pare}} + \underbrace{x_{k+1} + x_{k+2} + \dots + x_n}_{n-k \text{ numere impare}} = s$$

Suma alcătuită din k numere pare și $(n-k)$ numere impare este un număr par dacă și numai dacă numărul numerelor impare este par, deci $(n-k)$ este număr par.

R3.3. Determinați numerele reale $a, a, \dots, a_{n+}$ știind că

$$a + a + \dots + a_n + a_{n+} = n + \quad \text{și} \quad |a - a| = |a - a| = \dots = |a_{n+} - a|$$

Soluție. Fie $|a - a| = |a - a| = \dots = |a_{n+} - a| = k$. Atunci

$$a - a = \pm k$$

$$a - a = \pm k$$

$$\dots\dots\dots ()$$

$$a_n - a_{n+} = \pm k$$

$$a_{n+} - a = \pm k$$

Adunând membru cu membru relațiile (1) obținem:

$$= \pm k \pm k \pm \dots \pm k \quad \text{sau} \quad = k(\pm \pm \dots \pm) \quad ()$$

Din (2) rezultă $k=0$ sau numărul din paranteză este zero. În paranteză având un număr impar de ± 1 obținem că numai $k=0$ convine. Atunci obținem $a = a = \dots = a_{n+} =$.

R3.4. Ce condiție trebuie să îndeplinească numărul natural n pentru ca să existe n numere $a, a, \dots, a_n$ egale cu $+1$ sau -1 , cu proprietatea că:

$$a a + a a + \dots + a_{n-} a_n + a_n a = \quad ()$$

Soluție. Suma conținând n termeni, pentru a avea loc (1) trebuie ca $\frac{n}{2}$ termeni

să fie 1 iar $\frac{n}{2}$ termeni să fie -1 . Deci este necesar ca n să fie par, adică $n=2k$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Condiția nu este suficientă (exp. $k = \Rightarrow n =$ și deci $a a + a a = a a \neq$).

Vom calcula în două moduri produsul termenilor din (1) și anume:

$$(a a)(a a) \cdot \dots \cdot (a_{n-} a_n)(a_n a) = a a \cdot \dots \cdot a_n = \quad ()$$

Ținând seama că avem k termeni din (1) egali cu $+1$, iar $k\left(\frac{n}{2}\right)$ termeni egali

cu -1 obținem: $(a a)(a a) \cdot \dots \cdot (a_{n-} a_n)(a_n a) = (+)^k \cdot (-)^k \quad ()$

Din (2) și (3) rezultă că $= (+)^k \cdot (-)^k$, adică trebuie ca k să fie par. Deci $k=2l$, $l \in \mathbb{N}^*$. Atunci $n = k = \cdot l = l$.

În concluzie n trebuie să fie multiplu de 4.

5. Metoda reducerii la absurd

Metoda reducerii la absurd este o metodă specifică de demonstrație în matematică. La baza acestei metode stă una din legile fundamentale ale logicii clasice: legea terțului exclus, ce are următorul enunț:

Din două propoziții contradictorii una este adevărată, cealaltă falsă, iar a treia posibilitate nu există.

Legea terțului exclus nu ne precizează care din cele două propoziții este adevărată și care este falsă.

Când la două propoziții contradictorii aplicăm legea terțului exclus este suficient să stabilim că una dintre ele este falsă pentru a deduce că cealaltă este adevărată.

Metoda reducerii la absurd constă în a admite în mod provizoriu, ca adevărată propoziția contradictorie propoziției de demonstrat, apoi pe baza acestei presupuneri se deduc o serie de consecințe care duc la un rezultat absurd, deoarece ele contrazic sau ipoteza problemei date sau un adevăr stabilit mai înainte. Mai departe raționăm astfel: dacă presupunerea ar fi fost adevărată, atunci în urma raționamentelor logic corecte ar fi trebuit să ajungem la o concluzie adevărată, deoarece am ajuns la o concluzie falsă, înseamnă că presupunerea noastră a fost falsă. Aceasta duce la concluzia că presupunerea făcută nu este posibilă și rămâne ca adevărată concluzia propoziției date.

Metoda reducerii la absurd nu se reduce la propoziția că "a demonstra o propoziție este același lucru cu a demonstra contrara reciprocei ei", deoarece pot apărea și situații în care nu se contrazice ipoteza ci o altă propoziție (un rezultat cunoscut, o axiomă, o teoremă). Metoda reducerii la absurd se folosește atât în rezolvarea problemelor de calcul (de aflat) cât și la rezolvarea problemelor de "demonstrat". Metoda este des utilizată în demonstrarea teoremelor reciproce, precum și în demonstrarea teoremelor de unicitate.

Probleme rezolvate

Vom prezenta câteva exerciții și probleme rezolvate în care folosim metoda reducerii la absurd.

R5.1. Suma a 12 numere naturale nenule este 77. Arătați că printre ele se află cel puțin două numere egale.

Soluție. Presupunem că există 12 numere naturale nenule distincte ce au suma 77. Dacă le considerăm pe cele mai mici, suma lor este:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 11 + 12 = \frac{12 \cdot 13}{2} = 6 \cdot 13 = 78$$

Cum suma celor mai mici 12 numere naturale nenule distincte este mai mare decât suma dată, 77, rezultă că presupunerea făcută este falsă. Deci printre numerele considerate există cel puțin două numere egale.

R5.2. Suma a trei numere naturale este 139. Demonstrați că cel puțin unul dintre ele este mai mare sau egal cu 47.

Soluție. Folosim metoda reducerii la absurd, presupunem concluzia falsă, adică nici unul dintre numere nu este mai mare sau egal cu 47. Fie a, b, c numerele. Deci $a < 47$, $b < 47$, $c < 47$. Fiindcă a, b, c sunt numere naturale rezultă că $a \leq 46$, $b \leq 46$, $c \leq 46$. Ținând seama că $a + b + c = 139$ obținem: $a + b + c \leq 138$ sau $139 \leq 138$, ceea ce este absurd. Atunci presupunerea făcută este falsă și deci concluzia este adevărată, adică cel puțin unul dintre numere este mai mare sau egal cu 47.

R5.3. Să se arate că pentru orice număr natural diferit de zero fracția $\frac{2n-1}{2n+1}$ este ireductibilă.

Soluție. Presupunem că fracția dată nu este ireductibilă, atunci există un număr natural d diferit de unu astfel încât $d \mid (2n-1)$ și $d \mid (2n+1)$, de unde $d \mid [(2n+1) - (2n-1)]$ adică $d \mid 2$. Fiindcă $d \neq 1$, rezultă $d=2$. Atunci rezultă că $2 \mid (2n-1)$ ceea ce este absurd. Deci presupunerea făcută este falsă, și deci fracția este ireductibilă.

R5.4. Să se determine numărul elementelor mulțimii:

$$M = \left\{ \frac{n+1}{2n+1}, n = 1, 2, 3, \dots, 2003 \right\}$$

Soluție. Mulțimea are atâtea elemente câte valori distincte are fracția $\frac{n+1}{2n+1}$, $n=1, 2, \dots, 2003$. Presupunem prin absurd că există n_1 și n_2 , cu $n_1 \neq n_2$ pentru care fracția are aceeași valoare, adică:

$$\frac{n_1+1}{2n_1+1} = \frac{n_2+1}{2n_2+1} \Leftrightarrow (n_1+1)(2n_2+1) = (n_2+1)(2n_1+1) \Leftrightarrow$$

$$2n_1n_2 + n_1 + 2n_2 + 1 = 2n_1n_2 + n_2 + 2n_1 + 1 \Leftrightarrow n_1 = n_2.$$

Am ajuns la o contradicție pentru că n_1 a fost presupus diferit de n_2 . Deci mulțimea M are 2003 elemente.

R5.5. Știind că x, y, z sunt numere reale, să se arate că următoarele inegalități nu pot fi simultan adevărate:

$$x - 2z > 1$$

$$y - z \leq 1$$

$$2y - x \geq 1$$

Soluție. Folosim metoda reducerii la absurd. Presupunem că toate inegalitățile sunt adevărate. Înmulțim a doua inegalitate cu 2 și adunându-le obținem:

$$x - 2z + 2z - 2y + 2y - x > 0,$$

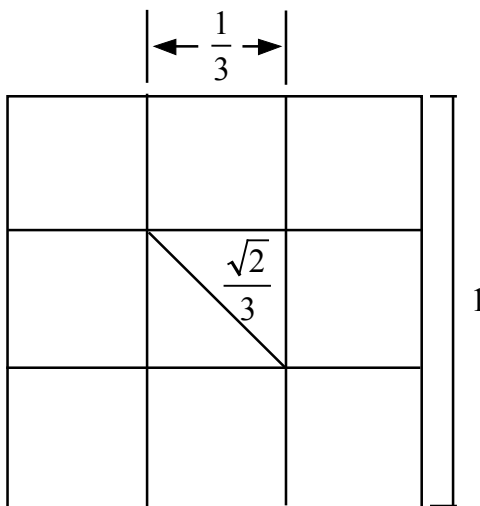
adică $0 > 0$, ceea ce este absurd. Deci presupunerea făcută este falsă. Deci inegalitățile considerate nu pot fi simultan adevărate.

R5.6. Să se arate că numărul $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ este irațional.

Soluție. Aplicăm metoda reducerii la absurd. Presupunem că $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ este rațional; rezultă că există $x \in \mathbf{Q}$ astfel încât $\sqrt{3} + \sqrt{5} = x$, de unde obținem că $3 + 5 + 2\sqrt{15} = x^2$ sau $8 + 2\sqrt{15} = x^2$, de unde $\sqrt{15} = \frac{x^2 - 8}{2} \in \mathbf{Q}$, fals. Deci presupunerea făcută este falsă și deci $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ este irațional.

R5.7. Se consideră un pătrat cu latura 1cm și 10 puncte în interiorul său. Demonstrați că printre cele 10 puncte date există două puncte astfel încât distanța dintre ele să nu depășească $\frac{\sqrt{2}}{3}$ cm.

Soluție. Cu metoda reducerii la absurd, presupunem că nu există astfel de 2 puncte cu distanța dintre ele să nu depășească $\frac{\sqrt{2}}{3}$ cm. Împărțim pătratul în 9 pătrate mai mici cu latura $\frac{1}{3}$ cm. Diagonala unui astfel de pătrat va avea lungimea $\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$ cm calculată cu teorema lui Pitagora. Cele 10 puncte fiind situate în interiorul pătratului "mare" înseamnă că putem așeza 2 puncte în două pătrate "mici" alăturate astfel încât distanța dintre ele să fie mai mare decât $\frac{\sqrt{2}}{3}$ cm. Pentru ca problema să fie rezolvată trebuie să existe atâtea pătrate "mici" câte puncte (zece). Am ajuns la o contradicție, rezultă că presupunerea făcută este falsă, rezultă că există 2 puncte la care distanța dintre ele nu depășește $\frac{\sqrt{2}}{3}$ cm.



R5.8. Fie $\triangle ABC$ și punctele M, N, P diferite de vârfurile triunghiului cu $M \in BC, N \in AC, P \in AB$ astfel încât $\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1$, atunci punctele M, N, P sunt coliniare. (Reciproca teoremei lui Menelaus)

Soluție. Folosim metoda reducerii la absurd, presupunem că punctele M, N, P nu sunt coliniare. Unind M cu P printr-o dreaptă ce taie pe AC într-un punct N' diferit de N și conform teoremei directe a lui Menelaus avem:

$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{N'C}{N'A} \cdot \frac{PA}{PB} = 1 \quad (1)$$

Din ipoteză avem:

$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1 \quad (2)$$

Din relațiile (1) și (2) obținem $\frac{N'C}{N'A} = \frac{NC}{NA}$ și deci $N' \equiv N$. Deci presupunerea că punctele M, N, P nu sunt coliniare este falsă. Deci are loc relația din ipoteză.

Reciproca teoremei lui Menelaus constituie una din principalele metode de demonstrare a coliniarității multor triplete de puncte.

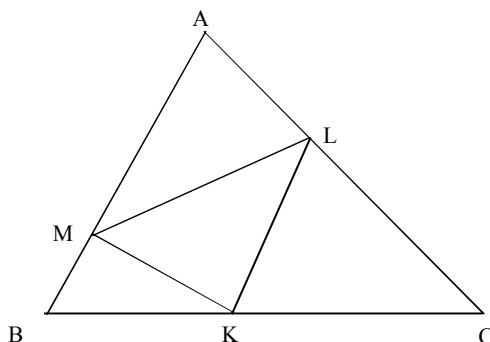
R5.9. Se consideră triunghiul ABC și punctele K, M, L situate pe laturile $(AB), (BC), (AC)$ și diferite de vârfurile triunghiului. Să se demonstreze că cel puțin una din ariile triunghiurilor MAL, KBM, LCK nu depășește un sfert din aria triunghiului ABC .

Soluție. Avem relațiile:

$$S_{[ABC]} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{2}, \quad S_{[AML]} = \frac{AM \cdot AL \cdot \sin A}{2}$$

Deci

$$\frac{S_{[AML]}}{S_{[ABC]}} = \frac{AM \cdot AL}{AB \cdot AC} \quad (1)$$



Analog obținem:

$$\frac{S_{[BMK]}}{S_{[ABC]}} = \frac{BM \cdot BK}{BA \cdot BC} \quad (2)$$

și

$$\frac{S_{[CLK]}}{S_{[ABC]}} = \frac{CL \cdot KC}{CA \cdot CB} \quad (3)$$

Folosim metoda reducerii la absurd. Presupunem că

$$\frac{S_{[AML]}}{S_{[ABC]}} > \frac{1}{4}, \quad \frac{S_{[BMK]}}{S_{[ABC]}} > \frac{1}{4}, \quad \frac{S_{[CLK]}}{S_{[ABC]}} > \frac{1}{4}$$

Ținând seama de relațiile (1), (2), (3), obținem

$$\frac{AM \cdot AL}{AB \cdot AC} \cdot \frac{BM \cdot BK}{BA \cdot BC} \cdot \frac{CL \cdot KC}{CA \cdot CB} > \frac{1}{64}$$

sau

$$\frac{AL \cdot CL}{AC \cdot AC} \cdot \frac{BM \cdot AM}{AB \cdot AB} \cdot \frac{BK \cdot CK}{BC \cdot BC} > \frac{1}{64} \quad (4)$$

Cu inegalitatea dintre media aritmetică și geometrică avem:

$$\sqrt{AL \cdot CL} \leq \frac{AL + CL}{2} = \frac{AC}{2}, \quad \text{deci} \quad \frac{AL \cdot CL}{AC \cdot AC} \leq \frac{1}{4}$$

și analog $\frac{AM \cdot BM}{AB \cdot AB} \leq \frac{1}{4}, \quad \frac{BK \cdot CK}{BC \cdot BC} \leq \frac{1}{4}.$

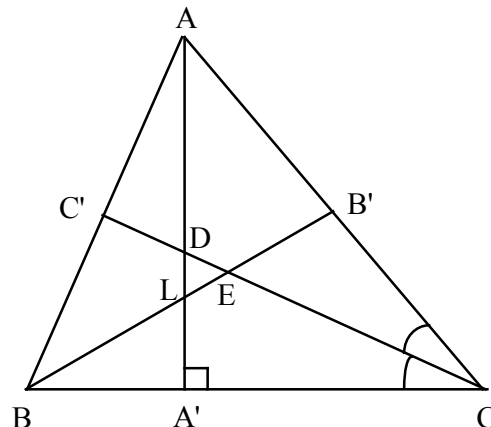
Înmulțind membru cu membru aceste ultime trei inegalități obținem:

$$\frac{AL \cdot CL}{AC \cdot AC} \cdot \frac{AM \cdot BM}{AB \cdot AB} \cdot \frac{BK \cdot CK}{BC \cdot BC} \leq \frac{1}{64} \quad (5)$$

Din (4) și (5) rezultă că presupunerea făcută este falsă, adică găsim un triunghi cu aria ce nu depășește $\frac{S_{[ABC]}}{4}$.

R5.10. Într-un triunghi ascuțitunghic neechilateral, printr-un vârf este dusă înălțimea, prin altul mediana, iar prin cel de-al treilea bisectoarea. Arătați că aceste linii nu pot forma prin intersecție un triunghi echilateral.

Demonstrație. Considerăm triunghiul ABC cu înălțimea AA', mediana BB' și bisectoarea CC'.



Aplicăm metoda reducerii la absurd. Presupunem că triunghiul DEL este echilateral. Din triunghiul dreptunghic CDA' obținem:

$$m(\angle DCA') = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

Deci $m(\angle C)=60^\circ$ și atunci $m(\angle B'CE)=30^\circ$. Dar $\angle DEL \equiv \angle B'EC$ (opuse la vârf), atunci $m(\angle B'EC)=60^\circ$. În triunghiul $B'EC$ avem

$$m(\angle EB'C)=180^\circ-(30^\circ+60^\circ)=90^\circ$$

Fiindcă BB' este mediană rezultă că $(BA) \equiv (BC)$. Dar $m(\angle C)=60^\circ$ și atunci rezultă că triunghiul ABC este echilateral. dar din ipoteză triunghiul ABC nu este echilateral. Atunci presupunerea făcută (că triunghiul DEL este echilateral) este falsă și deci triunghiul DEL nu este echilateral.

1. PRINCIPIUL PARITĂȚII

II.1.1. Demonstrați că oricare ar fi numărul natural n diferit de zero, cifra zecilor numărului $A = 9 + 9^2 + 9^3 + \dots + 9^{4n}$ este pară.

Gh. Achim

II.1.2. Să se arate că suma dintre un număr de trei cifre și răsturnatul său conține cel puțin o cifră pară.

II.1.3. Prin împărțirea unui număr $\overline{abc}$, scris în baza zece, la două numere naturale consecutive se obține același rest r . Arătați că c și r au aceeași paritate.

Alexandru Blaga

II.1.4. Să se demonstreze că suma pătratelor a două numere naturale distincte de aceeași paritate poate fi scrisă ca suma pătratelor a patru numere naturale nenule.

Cristi Busuioc

II.1.5. Demonstrați că nu există nici un triplet de numere întregi (x, y, z) astfel încât

$$x^2 - y^2 = 4z + 2$$

Florentin Smarandache

2. METODA REDUCERII LA ABSURD

II.2.1. Se consideră 12 numere naturale mai mici decât 144. Demonstrați că printre ele există trei care pot fi lungimile laturilor unui triunghi.

II.2.2. Demonstrați că oricum am alege $2n+1$ numere din mulțimea $\{1, 2, \dots, 4n\}$ cu $n \in \mathbb{N}^*$, printre ele există două cu diferența egală cu 2.

Dorel Miheț

II.2.3. Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Să se demonstreze că cel mai mic dintre numerele $a - b^2, b - c^2, c - d^2, d - a^2$ nu poate fi mai mare decât $\frac{1}{4}$.

Titu Andreescu

II.2.4. Fie $A = \left\{ x \mid x = \frac{2m-1}{2m-3}, m \in \mathbb{N} \right\}$ și $B = \left\{ x \mid x = \frac{2p+1}{2p-2}, p \in \mathbb{N} \right\}$. Să se arate că mulțimile A și B sunt disjuncte.

II.2.5. Demonstrați că nu se poate construi un triunghi echilateral cu vârfurile în nodurile unei rețele de pătrate cu latura 1.

II.2.6. Se consideră mulțimea T formată din 2004 puncte din plan, nu toate coliniare. Să se arate că mulțimea T conține două puncte E și F astfel încât pe dreapta EF nu mai există nici un punct din T .

II.2.7. Să se arate că nu există un triunghi cu lungimile înălțimilor 1, $\sqrt{3}$, $1 + \sqrt{3}$.

Monica Mureșan

1. PRINCIPIUL PARITĂȚII

II.1.1. Grupând termenii sumei câte patru, obținem :

$A = (9 + 9^2 + 9^3 + 9^4) + (9^5 + 9^6 + 9^7 + 9^8) + \dots + (9^{4n-3} + 9^{4n-2} + 9^{4n-1} + 9^{4n}) =$
 $9(1+9+9^2+9^3) + 9^5(1+9+9^2+9^3) + \dots + 9^{4n-3}(1+9+9^2+9^3) =$
 $(1+9+9^2+9^3)(9+9^5+\dots+9^{4n-3}) = 820(9+9^5+\dots+9^{4n-3})$. Ultima cifră a numărului A este 0 și A este divizibil cu 4, atunci ultimele două cifre pot fi : 00, 20, 40, 60, 80, deci cifra zecilor lui A este pară.

II.1.2. Fie $\overline{abcde}$ și $\overline{edcba}$ răsturnatul său. Suma lor este :
 $\overline{abcde} + \overline{edcba} = \overline{lmnkt}$

Suma a două cifre pare sau impare este un număr par . Dacă $b+d \leq 9$, atunci k este pară.

Dacă $b+d \geq 10$, cifra zecilor de mii m este pară sau impară, după cum a+e este număr impar sau par. Atunci m va fi pară.

II.1.3. Din teorema împărțirii cu rest rezultă că există numerele naturale q_1, q_2 , astfel încât

$\overline{abc} = n \cdot q_1 + r$, cu $0 \leq r < n$ și $\overline{abc} = (n+1)q_2 + r$, cu $0 \leq r < n+1$. Atunci
 $\overline{abc} - r = nq_1$, și $\overline{abc} - r = (n+1)q_2$, deci $\overline{abc} - r = nq_1 = (n+1)q_2$. Fiindcă unul din numerele n și n+1 este par, rezultă că $\overline{abc} - r$ este par, deci c și r au aceeași paritate.

II.1.4. Suma și diferența a două numere naturale distincte, de aceeași paritate este un număr natural par(nenul). Deci dacă a și b sunt două numere naturale distincte și de aceeași paritate, atunci $a+b=2k$, $a-b=2m$, unde k și m sunt numere naturale diferite de zero. Atunci $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 4k^2 + 4m^2$ sau $2(a^2 + b^2) = 4k^2 + 4m^2$ sau $a^2 + b^2 = k^2 + k^2 + m^2 + m^2$

II.1.5. Avem : $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$

i) Dacă x și y sunt pare, rezultă că x+y, x-y sunt pare. Deci $x^2 - y^2$ este multiplu de 4, dar $4z+2=2(2z+1)$, deci $4z+2$ nu este multiplu de 4 și nu există triplet care să satisfacă ipoteza.

ii) Dacă x și y sunt impare, atunci x+y, x-y sunt pare. Deci și în acest caz $x^2 - y^2$ este multiplu de 4, iar $4z+2$ nu este multiplu de 4. Nu avem nici în acest caz soluție.

iii) Dacă x și y au parități diferite, $x+y$, $x-y$ sunt impare, $4z+2$ fiind par, nu avem soluție.

2. METODA REDUCERII LA ABSURD

II.2.1. Fie $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{12} < 144$ cele 12 numere naturale. Presupunem prin absurd că printre cele 12 numere nu există trei care pot fi lungimile laturilor unui triunghi. Atunci avem:

$$a_3 \geq a_1 + a_2 \geq 1 + 1 = 2$$

$$a_4 \geq a_2 + a_3 \geq 1 + 2 = 3$$

$$a_5 \geq a_3 + a_4 \geq 2 + 3 = 5$$

$$a_6 \geq a_4 + a_5 \geq 3 + 5 = 8$$

$$a_7 \geq a_5 + a_6 \geq 5 + 8 = 13$$

$$a_8 \geq a_6 + a_7 \geq 8 + 13 = 21$$

$$a_9 \geq a_7 + a_8 \geq 13 + 21 = 34$$

$$a_{10} \geq a_8 + a_9 \geq 21 + 34 = 55$$

$$a_{11} \geq a_9 + a_{10} \geq 34 + 55 = 89$$

$$a_{12} \geq a_{10} + a_{11} \geq 55 + 89 = 144$$

am obținut o absurditate fiindcă $a_{12} < 144$.

II.2.2. Aplicăm metoda reducerii la absurd. Presupunem că printre cele $2n+1$ numere alese $a_1 < a_2 < \dots < a_{2n+1}$ nu există două cu diferența egală cu 2. Vom arăta că în acest caz diferența dintre două numere a căror indice diferă cu 2 este cel puțin 4. Într-adevăr, dacă $2 \leq a_{k+2} - a_k < 3$, cum $a_k < a_{k+1} < a_{k+2}$, una din diferențele $a_{k+1} - a_k$ sau $a_{k+2} - a_{k+1}$ este 2, absurd. Vom avea $a_1 \geq 1$, $a_3 \geq 1 + 4 = 5$, $a_5 \geq 1 + 8 = 9$, ..., $a_{2n+1} \geq 1 + 4n > 4n$, contradicție. Deci din cele $2n+1$ numere putem alege două cu diferența 2.

II.2.3. Aplicăm metoda reducerii la absurd. Presupunem că cel mai mic dintre cele patru numere este mai mare decât $\frac{1}{4}$. Rezultă că toate cele patru numere sunt mai mari ca $\frac{1}{4}$, adică avem relațiile $a - b^2 > \frac{1}{4}$,

$b - c^2 > \frac{1}{4}$, $c - d^2 > \frac{1}{4}$, $d - a^2 > \frac{1}{4}$. Adunând membru cu membru relațiile de mai sus obținem: $a + b + c + d - (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) > 1$ sau

$$0 > \left(\frac{1}{2} - a\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - b\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - c\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - d\right)^2$$

Dar o sumă de pătrate nu poate fi negativă. Deci am ajuns la o contradicție.

II.2.4. Presupunem prin absurd că există $x \in A \cap B$, deci există $m, p \in \mathbb{N}$ astfel încât $\frac{2m-1}{2m-3} = \frac{3p+1}{3p-2}$. Atunci obținem:

$$(2m-1)(3p-2) = (2m-3)(3p+1) \Leftrightarrow 6mp - 4m - 3p + 2 = 6mp - 9p + 2m - 3 \\ \Leftrightarrow -6m + 6p = -5 \quad \text{sau} \quad 6(p-m) = -5, \text{ imposibil fiindcă membrul drept este par iar cel stâng este impar. Atunci presupunerea făcută este falsă și obținem că mulțimile } A \text{ și } B \text{ sunt disjuncte.}$$

II.2.5. Presupunem prin absurd că există un triunghi echilateral ABC, care poate fi inclus într-un dreptunghi HQFE. Aria triunghiului ABC, fiind diferența dintre aria dreptunghiului HQFE și ariile triunghiurilor dreptunghice ABQ, BFC, ACE, va fi un număr rațional. Dar $S[ABC] = AB \cdot AB \frac{\sqrt{3}}{4}$ este un număr irațional, deci am ajuns la o contradicție. (C este pe (EF), A ∈ (EQ) și B = H)

II.2.6. Considerăm toate tripletele {E,F,M} de puncte necoliniare din T și ne fixăm asupra aceluia triplet pentru care distanța de la E la FM este minimă. Să arătăm că acesta este tripletul care convine. Folosim metoda reducerii la absurd. Considerăm un punct Q din T situat pe dreapta FM astfel ca M să fie între F și Q. În triunghiul EFM avem: $FM \geq EF$, iar în triunghiul EMQ, avem că $MQ \geq EQ$. Atunci $FQ = FM + MQ \geq EF + EQ$, care poate avea loc când punctele Q, E, F sunt coliniare.

II.2.7. Presupunem prin absurd că există un triunghi în condițiile din ipoteză. Fie x, y, z lungimile înălțimilor, adică $x=1, y=\sqrt{3}, z=\sqrt{3}+1$ și a, b, c, lungimile bazelor corespunzătoare înălțimilor. Dacă S este aria triunghiului avem relațiile:

$$a = \frac{2S}{x}, b = \frac{2S}{y}, c = \frac{2S}{z}. \text{ Din inegalitatea triunghiului obținem:}$$

$$b + c > a \quad \text{adică} \quad \frac{2S}{y} + \frac{2S}{z} > \frac{2S}{x}, \text{ adică} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{1+\sqrt{3}} > 1 \text{ adică}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}-1}{2} > 1, \text{ adică } 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 3 > 6 \text{ sau } 75 > 81, \text{ fals.}$$

Deci nu există un triunghi să satisfacă ipoteza.

PROBLEME CARE IMPLICĂ NOȚIUNEA DE PARITATE

PROBLEME COMENTATE

1. Fie n un număr natural, mai mare sau cel puțin egal cu 2.

a) Dovediți că 2^n se poate scrie ca o sumă de două numere naturale impare consecutive.

b) Dovediți că 3^n se poate scrie ca o sumă de trei numere naturale consecutive.

Soluție. a) 2^n este număr par, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. Pe de altă parte:

$$2^n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1} + 2^{n-1} = (2^{n-1} - 1) + (2^{n-1} + 1).$$

Pentru $n \geq 2$, numerele $2^{n-1} - 1$ și $2^{n-1} + 1$ sunt impare consecutive și deci acestea sunt cele care satisfac problema.

b) Avem $3^n = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1} + 3^{n-1} + 3^{n-1} = (3^{n-1} - 1) + 3^{n-1} + (3^{n-1} + 1)$.

Pentru $n \geq 2$, numerele $3^{n-1} - 1$, 3^{n-1} și $3^{n-1} + 1$ sunt evident numere naturale consecutive.

Comentarii. Să observăm că $3^n = (3^{n-1} - 2) + 3^{n-1} + (3^{n-1} + 2)$, deci 3^n se poate scrie ca o sumă de trei numere impare consecutive, pe când 2^n nu se poate scrie ca o sumă de două numere naturale consecutive.

2. Fie n un număr natural, mai mare decât 2 și mulțimea:

$$\left\{ \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n} \right\}.$$

Demonstrați că numărul fracțiilor ireductibile din această mulțime este par.

Soluție. Vom arăta că dacă fracția $\frac{k}{n}$ este ireductibilă, atunci și fracția $\frac{n-k}{n}$ este ireductibilă.

Dacă fracția $\frac{k}{n}$ este ireductibilă, atunci cel mai mare divizor comun al numerelor k și n este 1, adică n și k sunt numere prime între ele.

Să demonstrăm că și numerele $n - k$ și n sunt prime între ele, prin metoda reducerii la absurd. Presupunem că există $p \neq 1$ astfel încât $p|n - k$ și $p|n$. Atunci p divide și diferența:

$$n - (n - k) = n - n + k = k.$$

Deci $p|n$ și $p|k$ ceea ce contrazice faptul că n și k sunt prime între ele. Rezultă că fracțiile ireductibile sunt în "perechi", deci numărul acestora este par.

Comentariu. Revedeți demonstrația! Este problema complet rezolvată? Am demonstrat că fracțiile ireductibile $\frac{k}{n}$ și $\frac{n-k}{n}$ sunt diferite? Nu! Dacă, însă, am avea $\frac{k}{n} = \frac{n-k}{n}$, atunci $n = 2k$, deci fracția $\frac{k}{n} = \frac{k}{2k}$ nu ar fi ireductibilă, ceea ce completează demonstrația.

3. Se consideră numerele impare $m, n_1, n_2, \dots, n_m$. Să se demonstreze că printre numerele:

$$\frac{n_1 + n_2}{2}, \frac{n_2 + n_3}{2}, \dots, \frac{n_{m-1} + n_m}{2}, \frac{n_m + n_1}{2}$$

există un număr impar de numere impare.

Soluție. Deoarece suma a două numere impare este un număr par, rezultă că numerele $\frac{n_1 + n_2}{2}, \dots, \frac{n_m + n_1}{2}$ sunt numere naturale.

Să presupunem că printre acestea se află un număr par de numere impare. Atunci suma lor:

$$\frac{n_1 + n_2}{2} + \frac{n_2 + n_3}{2} + \dots + \frac{n_m + n_1}{2} = n_1 + n_2 + \dots + n_m$$

este un număr par. Pe de altă parte, aceeași sumă, fiind suma unui număr impar de numere impare, este un număr impar. Contradicție! Rezultă că presupunerea făcută este falsă, deci printre numerele din enunț există un număr impar de numere impare.

Comentariu. Pot fi toate numerele impare? Argumentați răspunsul!

4. Fie un număr impar de puncte cu proprietatea că oricare trei sunt necoliniare. Se unesc punctele arbitrar între ele astfel încât prin fiecare trece cel puțin o dreaptă. Demonstrați că există cel puțin un punct din care pornesc un număr par de drepte.

Soluție. Fie $A_1, A_2, \dots, A_{2n+1}$ punctele date. Notăm cu d_k numărul dreptelor care trec prin punctul A_k ($k = 1, 2, \dots, 2n+1$).

Să presupunem că toate numerele d_k sunt impare. Atunci $d_1 + d_2 + \dots + d_{2n+1}$ este un număr impar. Pe de altă parte, $d_1 + d_2 + \dots + d_{2n+1} = 2d$, unde d este numărul total de drepte, pentru că fiecare dreaptă a fost numărată de două ori. Rezultă că presupunerea făcută este falsă, deci există cel puțin un punct din care pornesc un număr par de drepte.

Comentariu. Este posibil ca numărul punctelor din care pornesc un număr par de drepte să fie par?

5. Se poate scrie numărul 1 sub forma:

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \dots + \frac{1}{n_6},$$

unde $n_1, n_2, \dots, n_6$ sunt numere naturale impare distincte?

Soluție. Vom arăta că această scriere nu este posibilă. Considerăm cele mai mari șase fracții cu numărătorul 1 și numitori numere impare diferite. Evident că nici un numitor nu poate fi egal cu 1. Suma acestora este:

$$S = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13}.$$

Cum:

$$\frac{1}{3} < 0,34; \frac{1}{5} = 0,20; \frac{1}{7} < 0,15; \frac{1}{9} < 0,12; \frac{1}{11} < 0,10; \frac{1}{13} < 0,08$$

rezultă:

$$S < 0,34 + 0,20 + 0,15 + 0,12 + 0,10 + 0,08 = 0,99 < 1.$$

Evident că pentru alți numitori, mai mari decât cei considerați, S va fi, de asemenea, inferioară lui 1.

Comentarii. 1) Găsiți o justificare mai simplă a faptului că $S \neq 1$.

2) Metoda folosită se poate aplica și pentru a arăta că $1 \neq \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \dots + \frac{1}{n_6} + \frac{1}{n_7}$, unde $n_1, n_2, \dots, n_7$ sunt numere naturale impare, diferite?

3) Există 9 numere impare, 3, 5, 7, 9, 11, 15, 35, 45, 231 astfel încât:

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{45} + \frac{1}{231}.$$

Dovediți că această scriere nu este unică.

Cum $\frac{1}{231} = \frac{1}{3 \cdot 77} = \frac{1}{77} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{45} \right)$ rezultă că 1 se poate scrie ca o sumă de 10 fracții cu proprietatea cerută. În general:

$$\frac{1}{5n} + \frac{1}{9n} + \frac{1}{45n} = \frac{1}{3n},$$

deci 1 se poate scrie ca o sumă de 13 fracții cu proprietatea cerută, dacă luăm $n = 15 \cdot 77$. Poate continua procedeul?

3) Dacă nu s-ar fi cerut ca numitorii să fie numere impare există o multitudine de scrieri ale lui 1. De exemplu:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{18} + \frac{1}{45} + \frac{1}{90}.$$

4) Comparați cu problema comentată nr. 13 de la capitolul "Sume. Produse".

6. Să se determine suma numerelor pare, cuprinse între $n^2 - n + 1$ și $n^2 + n + 1$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

Soluție. Produsul a două numere naturale consecutive este întotdeauna un număr par, deci $n^2 - n + 1 = n(n - 1) + 1$ și $n^2 + n + 1 = n(n + 1) + 1$ sunt numere impare.

Cel mai mic număr par, între numerele date este $n^2 - n + 2$, iar cel mai mare este $n^2 + n$. Avem de calculat suma:

$$\begin{aligned} S &= (n^2 - n + 2) + (n^2 - n + 4) + (n^2 - n + 6) + \dots + (n^2 + n - 2) + (n^2 + n) = \\ &= (n^2 - n) + 2 + (n^2 - n) + 4 + (n^2 - n) + 6 + \dots + (n^2 - n) + (2n - 2) + (n^2 - n) + (2n). \end{aligned}$$

Cum numărul numerelor pare cuprinse între numerele date este n (de ce?) avem:

$$\begin{aligned} S &= n(n^2 - n) + 2(1 + 2 + 3 + \dots + n) = n(n^2 - n) + 2 \cdot \frac{n(n + 1)}{2} = \\ &= n(n^2 - n + n + 1) = n(n^2 + 1). \end{aligned}$$

Comentariu. Calculați suma numerelor impare, strict mai mari decât $n^2 - n + 1$ și strict mai mici decât $n^2 + n + 1$.

7. Fie n numere naturale, nenule și distincte ($n > 2$), având suma $n^2 + n - 2$.

a) Demonstrați că printre acestea există cel puțin două numere impare.

b) Pot fi toate impare?

Soluție. a) Existența unui singur număr impar este exclusă pentru că suma ar trebui să fie, în acest caz, un număr impar, iar $n^2 + n - 2 = n(n + 1) - 2$ este un număr par.

Într-adevăr, $n(n + 1)$ este par, iar diferența a două numere pare este un număr par. Să presupunem că nici unul dintre numere nu este impar. Fie $S = 2 + 4 + 6 + \dots + 2n$ suma celor mai mici n numere pare, distincte și nenule. Avem:

$$S = 2(1 + 2 + 3 + \dots + n) = 2 \cdot \frac{n(n + 1)}{2} = n(n + 1) = n^2 + n > n^2 + n - 2.$$

De aici rezultă că cel puțin două numere sunt impare.

Comentariu. Putem realiza următorul model: în suma S înlocuim termenii $2k$ și $2p$ prin $2k - 1$ și $2p - 1$, $k, p \in \{1, 2, \dots, n\}$ și $k \neq p$.

Să observăm că numărul numerelor impare trebuie să fie par.

b) Dacă n este impar, atunci cel puțin unul dintre numere trebuie să fie par pentru ca suma să fie pară. Rezultă că, pentru n impar, nu toate numerele pot fi impare. Dacă n este par, să observăm că:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2,$$

iar:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 3) = (n - 1)^2.$$

Dar:

$$n^2 + n - 2 - (n - 1)^2 = n^2 + n - 2 - n^2 + 2n - 1 = 3n - 3 = 3(n - 1).$$

Cum n este par, rezultă că $3(n - 1)$ este impar, deci putem realiza următorul model cu toate numerele impare:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 3) + 3(n - 1) = n^2 + n - 2.$$

Comentariu. Problema cerea ca numerele să fie distincte. Trebuie deci să mai arătăm că în modelul prezentat toate numerele sunt distincte. Este suficient să arătăm că $3(n - 1) > 2n - 3$, ceea ce se verifică imediat.

8. Ce condiție trebuie să îndeplinească numărul natural n pentru ca să existe n numere $a_1, a_2, \dots, a_n$ egale cu $+1$ sau cu -1 , cu proprietatea că:

$$a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n + a_n a_1 = 0?$$

Soluție. În sumă sunt n termeni, deci $\frac{n}{2}$ dintre aceștia trebuie să fie $+1$, iar restul de $\frac{n}{2}$ să fie -1 . Rezultă, cu necesitate, că n trebuie să fie par. Fie $n = 2p$. Să arătăm că această condiție nu este suficientă. Contraexemplu: pentru $p = 1$, deci $n = 2$, avem $a_1 a_2 + a_2 a_1 = 2a_1 a_2 \neq 0$.

Să calculăm, în două moduri, produsul termenilor din suma dată.

Pe de o parte:

$$(a_1 a_2) \cdot (a_2 a_3) \cdot \dots \cdot (a_{n-1} a_n) \cdot (a_n a_1) = a_1^2 a_2^2 \cdot \dots \cdot a_n^2 = +1. \quad (1)$$

Pe de altă parte, având în vedere că p termeni din suma dată sunt egali cu $+1$, iar p termeni sunt egali cu -1 , obținem:

$$(a_1 a_2) \cdot (a_2 a_3) \cdot \dots \cdot (a_{n-1} a_n) \cdot (a_n a_1) = (+1)^p \cdot (-1)^p. \quad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă $(+1)^p \cdot (-1)^p = +1$, deci p trebuie să fie număr par. Dacă $p = 2k$ obținem $n = 4k$. Rămâne că răspunsul este: n trebuie să fie multiplu de 4.

Comentariu. Pentru ca problema să fie complet rezolvată trebuie să dăm și un model de realizare a ei. Dacă numerotăm la întâmplare $2k$ numere egale cu $+1$ și $2k$ numere egale cu -1 cu $a_1, a_2, \dots, a_{4k}$ nu este întodeauna îndeplinită condiția:

$$a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{4k} a_1 = 0.$$

Verificați pentru $a_1 = a_3 = 1$ și $a_2 = a_4 = -1$.

Un model este următorul:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_4 = a_5 = a_8 = a_9 = \dots = a_{4k-3} = a_{4k} = +1, \\ a_2 &= a_3 = a_6 = a_7 = a_{10} = \dots = a_{4k-2} = a_{4k-1} = -1. \end{aligned}$$

Este singurul?

9. Pentru ce valori ale numărului natural n , din egalitatea:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c},$$

rezultă egalitatea:

$$\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n} = \frac{1}{a^n + b^n + c^n},$$

când numitorii sunt nenuli?

Soluție. Relația dată se mai poate scrie:

$$\begin{aligned} (a+b+c)(ab+bc+ca) &= abc; \\ a^2b + abc + a^2c + ab^2 + b^2c + abc + abc + bc^2 + ac^2 &= abc; \\ a^2(b+c) + a(b^2 + 2bc + c^2) + bc(b+c) &= 0; \\ (b+c)[a^2 + a(b+c) + bc] &= 0; \\ (a+b)(b+c)(c+a) &= 0. \end{aligned}$$

De aici, $a = -b$ sau $b = -c$ sau $c = -a$.

Înlocuind, de exemplu, pe a cu $-b$ în a doua relație, obținem:

$$\frac{1}{(-b)^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n} = \frac{1}{(-b)^n + b^n + c^n}.$$

Aceasta este evident adevărată numai dacă n este impar. Analog pentru $b = -c$ sau $c = -a$.

Comentariu. Enunțul nu specifică cărei mulțimi aparțin numerele a, b, c . Pentru ca problema să fie posibilă, a, b și c trebuie să aparțină unei mulțimi care conține cel puțin două numere opuse.

10. Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale ecuația:

$$2^x + 2^y + 2^z = 2336,$$

unde $x < y < z$.

Soluție. Să observăm că $2336 = 2^5 \cdot 73$. Ecuația se mai poate scrie:

$$2^x(1 + 2^{y-x} + 2^{z-x}) = 2^5 \cdot 73.$$

Având în vedere că $x < y < z$ rezultă că $1 + 2^{y-x} + 2^{z-x}$ este un număr impar, deci:

$$2^x = 2^5, \quad 1 + 2^{y-x} + 2^{z-x} = 73.$$

De aici rezultă că $x = 5$, iar $2^{y-5} + 2^{z-5} = 72$. Cum $y < z$ avem $y - 5 < z - 5$ și deci, din:

$$2^{y-5}(1 + 2^{z-y}) = 2^3 \cdot 9,$$

rezultă $2^{y-5} = 2^3$, $y - 5 = 3$, $y = 8$ și $1 + 2^{z-8} = 9$, de unde $2^{z-8} = 8$ și deci $z - 8 = 3$, adică $z = 11$.

Soluția ecuației, în condițiile cerute este, deci, tripletul $(5, 8, 11)$.

Comentarii. 1) Orice număr natural nenul n se poate scrie sub forma $n = 2^p(2q + 1)$, unde p și q sunt numere naturale (deci pot lua și valoarea 0).

2) Condiția $x < y < z$ a simplificat foarte mult problema. Dacă nu s-ar fi impus această ordine ar fi trebuit analizate cazurile:

a) $x = y = z$, adică $3 \cdot 2^x = 2336$. Ecuația nu are soluții pentru că $x \in \mathbb{N}$, iar 2336 nu este multiplu de 3.

b) Dacă două și numai două dintre necunoscute ar fi egale, de exemplu $x = y \neq z$, am avea:

$$2 \cdot 2^x + 2^z = 2^5 \cdot 73.$$

Presupunând $x + 1 < z$ obținem $2^{x+1}(1 + 2^{z-x-1}) = 2^5 \cdot 73$, de unde $x + 1 = 5$, adică $x = 4$ și $1 + 2^{z-5} = 73$, de unde $2^{z-5} = 72$. Cum 72 nu este o putere a lui 2, nici în acest caz ecuația nu are soluție.

c) Dacă $x \neq y \neq z \neq x$ atunci ecuația are șase soluții:

$$(5, 8, 11), (5, 11, 8), (8, 5, 11), (8, 11, 5), (11, 5, 8), (11, 8, 5).$$

11. Polinomul $P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$ are toți coeficienții numere întregi. Dacă $P(0)$ și $P(1)$ sunt numere impare, demonstrați că polinomul nu se anulează pentru nici un număr întreg.

Soluție. Din ipoteză rezultă că $a_0 = 2k + 1$, iar $a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 = 2p + 1$.

Vom demonstra prin reducere la absurd. Să presupunem că există $x_0 \in \mathbb{Z}$ astfel încât $P(x_0) = 0$.

Dacă x_0 este par atunci x_0^k este par și $a_k x_0^k$ este, de asemenea, număr par ($k = 1, 2, \dots, n$). Mai mult, $a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_1 x_0$ este o sumă de numere pare, deci este număr par. Cum a_0 este impar, suma $(a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_1 x_0) + a_0$, fiind formată dintr-un număr par și unul impar este un număr impar și deci nu poate fi egală cu 0.

Dacă x_0 este impar atunci x_0^k este impar, iar $a_k x_0^k$ are aceeași paritate cu a_k . De aici rezultă că:

$$a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_1 x_0$$

are aceeași paritate cu $a_n + a_{n-1} + \dots + a_1$, dar această sumă este pară. Într-adevăr, cum $a_0 = 2k + 1$, iar $a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 = 2p + 1$, rămâne că $a_n + a_{n-1} + \dots + a_1$ este număr par. Deci, și în acest caz, $P(x_0)$ este o sumă dintre un număr par și unul impar și nu poate fi 0.

Comentarii. 1) Se poate demonstra că, dacă un polinom cu coeficienți întregi admite o rădăcină întreagă, aceasta divide termenul liber. Folosind acest rezultat, presupunerea că x_0 este par nu ar mai fi necesară.

2) Dacă $P(X)$ are coeficienți întregi și dacă se divide cu $X - x_0$, $x_0 \in \mathbb{Z}$, atunci câtul împărțirii este un polinom $Q(X)$ cu coeficienți întregi. Presupunem că $x_0 \in \mathbb{Z}$ este rădăcină a polinomului dat. În $P(X) = (X - x_0)Q(X)$ înlocuim X cu 0 și apoi cu 1 și obținem:

$$P(0) = -x_0 Q(0),$$

$$P(1) = (1 - x_0)Q(1).$$

Cum $-x_0$ și $1 - x_0$ sunt de parități diferite, ar trebui ca cel puțin unul dintre numerele $P(0)$ și $P(1)$ să fie par. Dar, conform ipotezei, $P(0)$ și $P(1)$ sunt ambele impare, deci contradicție.

Am demonstrat, deci, în alt mod, cerința problemei.

12. Fie $P(X)$ un polinom cu coeficienți numere întregi. Dacă $P(1) = P(2) = 0$, arătați că $P(k)$ este un număr întreg par, oricare ar fi $k \in \mathbb{Z}$.

Soluție. Dacă $P(1) = 0$ rezultă că polinomul dat se divide cu $X - 1$ apoi, din $P(2) = 0$, rezultă că polinomul se divide și cu $X - 2$. Cum $X - 1$ și $X - 2$ sunt prime între ele rezultă că $P(X)$ se divide cu produsul lor. Există, deci, un polinom $Q(X)$ cu coeficienți întregi astfel încât:

$$P(X) = (X - 1)(X - 2) \cdot Q(X). \quad (1)$$

Înlocuind nedeterminata X prin $k \in \mathbb{Z}$ avem:

$$P(k) = (k - 1)(k - 2) \cdot Q(k).$$

Dar $Q(k)$ este un număr întreg. Dacă numărul k este par, atunci factorul $k - 2$ este par, deci $P(k)$ este par. Dacă numărul k este impar, atunci factorul $k - 1$ este par, deci $P(k)$ este par. Rezultă că, pentru orice număr k întreg, $P(k)$ este un număr par.

Comentariu. În demonstrație esențial nu a fost faptul că 1 și 2 sunt numere întregi consecutive, ci faptul că acestea au parități diferite. Problema se poate extinde astfel:

Dacă polinomul $P(X)$, cu coeficienți întregi, admite două rădăcini întregi de parități diferite, atunci $P(k)$ este un număr par pentru orice număr k întreg.

13. Fie un tablou cu m linii și n coloane completat numai cu elementele -1 și $+1$, astfel încât produsul elementelor de pe fiecare linie și de pe fiecare coloană este -1 . Să se arate că numerele m și n nu pot fi de parități diferite.

Soluție. Pentru m și n de aceeași paritate, un astfel de tablou există., de exemplu, pentru $m = 3$ și $n = 5$:

$$\begin{array}{ccccc} -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Acest tablou verifică condiția că produsul elementelor de pe fiecare linie și de pe fiecare coloană este -1 .

Să presupunem că se poate completa un astfel de tablou și în cazul în care m și n sunt de parități diferite. Presupunem m par și n impar. În tablou sunt mn elemente. Să calculăm produsul p al celor mn elemente în două moduri.

Știm că produsul elementelor de pe fiecare linie este -1 . Atunci:

$$p = \underbrace{(-1) \cdot (-1) \cdot \dots \cdot (-1)}_{\text{de } m \text{ ori}} = (-1)^m = +1.$$

Analog, produsul elementelor de pe fiecare coloană fiind tot -1 , avem:

$$p = \underbrace{(-1) \cdot (-1) \cdot \dots \cdot (-1)}_{\text{de } n \text{ ori}} = (-1)^n = -1.$$

Contradicție! Analog se demonstrează imposibilitatea și pentru m impar și n par. Cu aceasta am răspuns complet la întrebarea problemei.

Comentarii. 1) Dacă am fi încercat să completăm un astfel de tablou, de exemplu pentru $m = 3$ și $n = 2$, evident că nu am fi reușit, dar aceasta nu ar fi însemnat că am demonstrat imposibilitatea cerută.

2) Pentru a obține tablouri cu proprietatea cerută în cazul când m și n sunt de aceeași paritate putem proceda astfel: completăm la întâmplare cu elementele -1 și $+1$ un tablou având $m - 1$ linii și $n - 1$ coloane. Linia numărul m o completăm cu $+1$, respectiv -1 după cum produsul elementelor de pe fiecare coloană a tabloului cu $m - 1$ linii și $n - 1$ coloane este -1 , respectiv $+1$. Analog completăm coloana a n -a. Paritatea numărului elementelor egale cu -1 din primele $n - 1$ elemente ale liniei a m -a este aceeași cu paritatea numărului elementelor egale cu -1 din primele $m - 1$ elemente ale coloanei a n -a.

Rămâne de completat tabloul cu elementul aflat la intersecția liniei a m -a cu coloana a n -a. Acesta va fi egal cu $+1$ dacă numărul elementelor egale cu -1 din primele $n - 1$ elemente ale coloanei a m -a este impar sau cu -1 dacă acest număr este par.

3) Există oare oricâte tablouri cu proprietatea cerută în cazul în care m și n au aceeași paritate? Evident, nu! Se poate demonstra că numărul acestor tablouri este $2^{(m-1)(n-1)}$.

14. Se consideră un tablou cu n linii și n coloane, cu elemente 0 și 1 , construit astfel: la intersecția liniei i cu coloana j se scrie 1 dacă i divide pe j și 0 dacă i nu divide pe j pentru orice $1 \leq i \leq n$ și $1 \leq j \leq n$.

Dacă p este un număr natural dat, să se determine cea mai mare valoare a lui n astfel încât să existe p coloane cu proprietatea că suma elementelor de pe fiecare dintre ele este un număr impar.

Soluție. Pentru a putea aborda mai ușor problema să construim un astfel de tablou pentru $n = 5$:

linia 1 va fi 1 1 1 1 1 pentru că 1 divide orice număr;

linia 2 va fi 0 1 0 1 0 pentru că 2 divide pe 2 și pe 4, dar nu divide pe 1, 3 și 5; repetând raționamentul obținem, în final, tabloul:

1	1	1	1	1
0	1	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	0	1	0
0	0	0	0	1

Să observăm că numai pe coloanele 1 și 4 suma elementelor de pe fiecare din ele este un număr impar.

De fapt, suma elementelor de pe coloana j reprezintă numărul de divizori naturali ai numărului j . Dar singurele numere naturale cu un număr impar de divizori naturali sunt pătratele perfecte (vezi problema comentată nr. 4 de la capitolul "Pătrate perfecte").

Problema cere să existe exact p pătrate perfecte în mulțimea $\{1, 2, \dots, n\}$. Rezultă că $p^2 \leq n < (p+1)^2 = p^2 + 2p + 1$. Cum n trebuie să fie cel mai mare obținem $n = p^2 + 2p$.

Comentarii. 1) În cazul particular $p = 2$ tabloul (1) mai poate fi completat cu 3 linii și 3 coloane fără ca pe altă coloană, în afara coloanelor 1 și 4, suma elementelor să fie număr impar.

2) Un element oarecare al tabloului poate fi notat cu a_{ij} și înseamnă că acest element se află la intersecția liniei i cu coloana j .

În cazul nostru:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } i \text{ divide } j \\ 0, & \text{dacă } i \text{ nu divide } j \end{cases} \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

15. Demonstrați că oricare ar fi numerele naturale p și n , mai mari strict ca 1, numărul p^n se poate scrie ca o sumă de p numere naturale consecutive impare.

Soluție. Să arătăm că există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât :

$$p^n = (2k+1) + (2k+3) + \dots + [2k + (2p-1)]$$

$$p^n = \sum_{i=1}^p [2k + (2i-1)] = 2 \sum_{i=1}^p k + 2 \sum_{i=1}^p i - \sum_{i=1}^p 1$$

$p^n = 2kp + p(p+1) - p$ de unde $p^{k-1} = 2^{k+p}$. Obținem $k = \frac{p(p^{k-2} - 1)}{2}$. Trebuie să arătăm că numărul k este natural. Dacă p este par evident $k \in \mathbb{N}$. Dacă p este impar atunci $p^{k-2} - 1$ este par deci $k \in \mathbb{N}$.

Comentariu

Ce condiție trebuie impusă lui p astfel încât p^n să se poată scrie ca o sumă de p numere consecutive?

Deci $p^n = \sum_{i=1}^p (k+i) = kp + \frac{p(p+1)}{2}$. De aici: $k = p^{n-1} - \frac{p+1}{2}$. Rezultă că p trebuie să fie număr natural impar.

PROBLEME PROPUSE

1. Un număr de 3 cifre, divizibil cu 77, are toate cifrele pare. Să se afle acest număr.
2. Arătați că suma a n numere naturale impare consecutive ($n > 1$) nu poate fi un număr prim.
3. Fie n un număr natural impar, $a_1, a_2, \dots, a_n$ numere întregi, iar $b_1, b_2, \dots, b_n$ aceleași numere în altă ordine. Arătați că numerele:

$$N_1 = (a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \cdot \dots \cdot (a_n + b_n)$$

și:

$$N_2 = (a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \cdot \dots \cdot (a_n - b_n)$$

sunt numere pare.

4. Într-unul din pătratele unei table de șah este scris numărul $+1$, iar în celelalte -1 . Înțelegem prin "mutare" schimbarea tuturor semnelor numerelor dintr-o linie sau dintr-o coloană oarecare. Să se arate că oricâte mutări am efectua, nu putem obține $+1$ în toate pătratele tablei.

5. Să se demonstreze că diferența $a^3 - b^3$, formată din cuburile numerelor întregi impare a și b se divide cu 2^n , dacă și numai dacă $(a - b)$ se divide cu 2^n .

6. La o consfătuire s-au întâlnit n persoane, dar nu fiecare a dat mâna cu toate celelalte. Să se arate că numărul celor care au dat mâna de un număr impar de ori este par.

7. Fie p numărul divizorilor naturali ai numărului $N_1 = n^4 - 4n^3 + 8n^2 - 8n + 3$ ($n \in \mathbb{N} - \{1\}$), iar q numărul divizorilor naturali ai numărului $N_2 = N_1 + 1$. Să se demonstreze că $p + q$ este număr impar.

8. Arătați că:

1) numărul $\underbrace{11\dots1}_{\text{de } n \text{ ori}} \underbrace{55\dots5}_{\text{de } n \text{ ori}}$ poate fi scris ca un produs de două numere impare consecutive;

2) numărul $\underbrace{44\dots4}_{\text{de } n \text{ ori}} \underbrace{88\dots8}_{\text{de } n \text{ ori}}$ poate fi scris ca un produs de două numere pare consecutive;

3) numărul $\underbrace{44\dots4}_{\text{de } n \text{ ori}} \underbrace{22\dots2}_{\text{de } n \text{ ori}}$ poate fi scris ca un produs de două numere consecutive.

9. Găsiți toate numerele de 3 cifre alcătuite din cifre pare și divizibile prin produsul cifrelor respective.

10. Arătați că ecuația $x^2 - 2y^2 + 8z - 3 = 0$ nu are soluții în mulțimea numerelor întregi.

11. Există polinoame P de gradul trei, cu coeficienți întregi, astfel încât $P(1) = 1$ și $P(3) = 4$? Dar astfel încât $P(7) = 5$ și $P(15) = 9$? Condiția ca polinoamele să fie de gradul trei este esențială?

12. Demonstrați că, fiind dat un număr natural nenul n , există un număr natural având n cifre, divizibil cu 5^n , care se scrie cu cifre impare.

13. Pe o bancă stau zece elevi, băieți și fete. Se poate ca între oricare doi băieți să fie un număr par de elevi, iar între oricare două fete un număr impar?

14. Arătați că $[(3 + \sqrt{5})^n] + 1$ este un număr par, pentru orice număr natural n . ($[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului x).

SOLUȚII, INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

1. Din faptul că 77 divide pe $\overline{abc}$ rezultă că 11 divide pe $100a + 10b + c = 99a + 11b + a - b + c = 11(9a + b) + a - b + c$. Trebuie deci ca $a - b + c$ să fie multiplu de 11. Deoarece a, b și c sunt cifre pare, singura posibilitate este $a - b + c = 0$, adică $b = a + c$.

Numărul căutat devine $\overline{a(a+c)c} = 100a + 10(a+c) + c = 11(10a + c)$. Dar $10a + c$ trebuie să fie multiplu de 7, iar $a + c$ trebuie să fie cifră. Analizând cazurile posibile găsim $a = 4$ și $c = 2$. Deci numărul căutat este 462.

2. Avem $(2k + 1) + (2k + 3) + \dots + (2k + 2n - 1) = 2nk + [1 + 3 + \dots + (2n - 1)] = 2nk + n^2 = n(2k + n)$. Cum $n > 1$ rezultă că suma dată se divide cel puțin prin n și cum $n(2k + n) > n$ rezultă că suma dată nu este număr prim.

3. Problema constituie o generalizare a problemei comentate nr. 9 de la capitolul "Principiul cutiei". Trebuie să arătăm că cel puțin un factor al lui N_1 este număr par. Presupunem că toți factorii sunt impari. Dar suma lor este $2(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$, deci număr par. Pe de altă parte, suma unui număr impar de numere impare este un număr impar. Contradicție! Analog pentru N_2 .

4. După fiecare "mutare", paritatea numărului de semne "+" de pe tablă rămâne aceeași. Într-adevăr, să presupunem că înainte de o mutare pe linia (sau coloana) respectivă avem a semne "+" și b semne "-". După "mutare" pe linia (coloana) considerată vom avea a semne "-" și b semne "+". Deoarece $a + b = 8$ rezultă că a și b au aceeași paritate, deci paritatea numărului de semne "+" este aceeași.

Așadar pe tablă se va afla mereu un număr impar de semne "+", deci niciodată nu vom putea obține +1 în toate cele 64 de pătrățele ale tablei de șah.

5. Dacă $a - b$ se divide cu 2^n , cum $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$, rezultă că 2^n divide pe $a^3 - b^3$.

Reciproc: 2^n divide pe $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$. Dar $a^2 + ab + b^2$ este număr impar pentru a și b impari. Rezultă că 2^n divide pe $a - b$.

6. Când o persoană dă mâna cu o altă persoană se realizează două strângeri de mână, deci numărul total al strângerilor de mână este par ($2s$). Avem, deci:

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 2s, (*)$$

unde p_k reprezintă numărul strângerilor de mână pe care le-a realizat persoana cu numărul de ordine k .

Printre cele n persoane sunt i persoane care au realizat fiecare câte un număr par de strângeri de mână și $n - i$ persoane care au realizat fiecare câte un număr impar de

strângeri de mână. Putem reorganiza în suma (*) termenii astfel:

$$\underbrace{p'_1 + p'_2 + \dots + p'_i}_{i \text{ numere pare}} + \underbrace{p'_{i+1} + p'_{i+2} + \dots + p'_n}_{n-i \text{ numere impare}} = 2s.$$

Suma formată din i numere pare și $(n-i)$ numere impare este un număr par dacă și numai dacă numărul numerelor impare este par, deci $n-i$ este par.

7. Se observă că $N_2 = (n^2 - 2n + 2)^2$, iar $N_1 = (n^2 - 2n + 2)^2 - 1$.

Cum N_2 are un număr impar de divizori naturali, iar N_1 are un număr par de divizori pentru că nu poate fi pătrat perfect rezultă că $p+q$ este impar (este bine să se revadă problemele comentate nr. 4 și nr. 9 de la capitolul "Pătrate perfecte").

8. Fie numărul:

$$\begin{aligned} N &= \overbrace{aa\dots a}^{\text{de } n \text{ ori}} \overbrace{bb\dots b}^{\text{de } n \text{ ori}} = \\ &= a(10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots + 10 + 1) \cdot 10^n + b(10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots + 10 + 1) = \\ &= a \cdot \frac{10^n - 1}{10 - 1} \cdot 10^n + b \cdot \frac{10^n - 1}{10 - 1} = \\ &= \frac{10^n - 1}{3} \left(\frac{a \cdot 10^n + b}{3} \right) = \frac{10^n - 1}{3} \left(\frac{a(10^n - 1)}{3} + \frac{a + b}{3} \right). \end{aligned}$$

1) Pentru $a = 1$, $b = 5$ avem:

$$N = \overbrace{11\dots 1}^{\text{de } n \text{ ori}} \overbrace{55\dots 5}^{\text{de } n \text{ ori}} = \frac{10^n - 1}{3} \left(\frac{10^n - 1}{3} + 2 \right) = \overbrace{33\dots 33}^{\text{de } n \text{ ori}} \cdot \overbrace{33\dots 35}^{\text{de } n-1 \text{ ori}}.$$

2) Pentru $a = 4$, $b = 8$ avem:

$$\begin{aligned} N &= \frac{10^n - 1}{3} \left(\frac{4 \cdot (10^n - 1)}{3} + 4 \right) = \frac{2}{3} \cdot (10^n - 1) \cdot \left(\frac{2}{3}(10^n - 1) + 2 \right) = \\ &= \overbrace{66\dots 66}^{\text{de } n \text{ ori}} \cdot \overbrace{66\dots 68}^{\text{de } n-1 \text{ ori}}. \end{aligned}$$

3) Pentru $a = 4$ și $b = 2$ avem:

$$\begin{aligned} N &= \frac{10^n - 1}{3} \left(\frac{4 \cdot (10^n - 1)}{3} + 2 \right) = \frac{2}{3} \cdot (10^n - 1) \cdot \left(\frac{2}{3}(10^n - 1) + 1 \right) = \\ &= \overbrace{66\dots 66}^{\text{de } n \text{ ori}} \cdot \overbrace{66\dots 67}^{\text{de } n-1 \text{ ori}}. \end{aligned}$$

9. Un număr de 3 cifre este de forma $\overline{abc}$. Cum a, b, c sunt cifre pare rezultă $a = 2x$, $b = 2y$, $c = 2z$, unde x, y, z aparțin mulțimii $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, iar $x \neq 0$. Cifrele x, y sau z nu pot fi mai mari ca 4 pentru că, în acest caz, a, b sau c nu ar mai fi cifre.

Avem:

$$\overline{abc} = a \cdot 100 + b \cdot 10 + c = 2x \cdot 100 + 2y \cdot 10 + 2z = 2(x \cdot 100 + y \cdot 10 + z) = 2 \cdot \overline{xyz}.$$

Cum a, b și c sunt pare rezultă că produsul cifrelor acestora este un multiplu de 8 deci, conform cerinței problemei, 8 divide pe $2 \cdot \overline{xyz}$, adică 4 divide pe $\overline{xyz}$. Dar $\overline{xyz} = 100x + \overline{yz}$.

De aici rezultă, pentru că $100x$ se divide cu 4, că $\overline{yz}$ trebuie să fie multiplu de 4. Având în vedere că $z \leq 4$, $y \leq 4$ avem:

$$\overline{yz} \in \{12, 24, 32, 44\}.$$

Rămâne să analizăm fiecare din aceste patru cazuri posibile.

1) Din $\overline{yz} = 12$ rezultă $\overline{abc} = \overline{a24}$. Cum a este par rezultă că $a \cdot b \cdot c$ este multiplu de 16. De aici avem $a = 2$ sau $a = 6$. Numerele 224 și 624 sunt printre cele căutate.

2) Din $\overline{yz} = 24$, rezultă $\overline{abc} = \overline{a48}$. Cum a este par, produsul $a \cdot 4 \cdot 8 = 32a$ este multiplu de 64, deci 64 divide $\overline{a48}$. Se arată că numai pentru $a = 4$ numărul 64 divide pe $\overline{a48}$ dar, în acest caz, $4 \cdot 4 \cdot 8 = 128$ nu divide pe 448.

3) Dacă $\overline{yz} = 32$, avem $\overline{abc} = \overline{a64}$, deci 48 divide pe $\overline{a64}$, adevărat numai pentru $a = 8$, dar $8 \cdot 6 \cdot 4 = 192$ nu divide pe 864.

4) În sfârșit, dacă $\overline{yz} = 44$ rezultă că $\overline{abc} = \overline{a88}$, deci 128 trebuie să dividă $\overline{a88}$, dar $\overline{a88}$ nu este multiplu de 128 pentru $a \in \{2, 4, 6, 8\}$. Rămâne că singurele soluții ale problemei sunt numerele 224 și 624.

10. Presupunem că ecuația are soluții în mulțimea numerelor întregi. Atunci, cu necesitate, x este impar. Fie $x = 2k + 1$ și obținem:

$$4k^2 + 4k + 1 - 2y^2 + 8z - 3 = 0,$$

de unde $2k^2 + 2k - y^2 + 4z - 1 = 0$. De aici rezultă că y trebuie să fie, cu necesitate, număr impar. Fie $y = 2p + 1$. Avem:

$$2k^2 + 2k - 4p^2 - 4p - 1 + 4z - 1 = 0,$$

sau:

$$2k^2 + 2k + 4z = 4p^2 + 4p + 2,$$

adică:

$$k^2 + k + 2z = 2p^2 + 2p + 1.$$

Cum $k(k+1) + 2z$ este număr par, iar $2p(p+1) + 1$ este impar rezultă că egalitatea este imposibilă.

11. Fie $P(X) = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$. Fie a și b două numere întregi. Atunci:

$$\begin{aligned} P(a) - P(b) &= a_3(a^3 - b^3) + a_2(a^2 - b^2) + a_1(a - b) = \\ &= (a - b)[a_3(a^2 + ab + b^2) + a_2(a + b) + a_1]. \end{aligned}$$

Evident, ambii factori ai acestui produs sunt numere întregi. Notând paranteza dreaptă cu $Q(a, b)$, pentru $a = 3$ și $b = 1$ obținem:

$$P(3) - P(1) = (3 - 1)Q(3, 1)$$

sau:

$$4 - 1 = 2 \cdot Q(3, 1); \quad 3 = 2Q(3, 1). \quad (1)$$

Cum $Q(3, 1)$ este număr întreg avem $2Q(3, 1)$ număr par. Egalitatea (1) este, deci, imposibilă. Analog, pentru $a = 15$ și $b = 7$ avem:

$$P(15) - P(7) = (15 - 7) \cdot Q(15, 7)$$

sau

$$9 - 5 = 8Q(5, 7); \quad 4 = 8Q(5, 7); \quad 1 = 2Q(5, 7),$$

deci din nou imposibilitate.

Rezultatele rămân valabile pentru polinoame cu coeficienți întregi de orice grad n .

12. Se observă că, pentru n număr natural dat, există un număr N având n cifre care să fie multiplu de 5^n (5^n nu are mai mult de n cifre și în cazul în care are mai puține completăm la dreapta cu zerouri).

Avem, deci:

$$N = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_k \dots a_1}$$

un multiplu al lui 5^n de n cifre. Numărul N poate conține, evident, și cifre pare. Vom încerca să transformăm numărul N într-un număr care conține numai cifre impare.

Pentru a transforma o cifră pară a_k într-o cifră impară astfel încât numărul obținut să rămână multiplu de 5^n adunăm la N numărul $5^n \cdot 10^{k-1}$. Deoarece a k -a cifră a numărului $5^n \cdot 10^{k-1}$ este 5, în loc de a_k vom obține $a_k + 5$ (sau $a_k + 5 - 10$, dacă $a_k \geq 5$), adică o cifră impară. Începem această operație cu cifra pară de rang minim. Procedăm analog cu celelalte cifre pare de rang superior (obținute, eventual, pe parcurs) până la cifra de rang $n - 1$. Având în vedere că n este finit, după un număr finit de pași, toate cifrele de rang mai mic sau egal cu $n - 1$ devin impare. Obținem un multiplu al lui 5^n de forma:

$$p \cdot 10^n + \overline{a'_n a'_{n-1} \dots a'_1},$$

în care toate cifrele $a'_1, a'_2, \dots, a'_{n-1}, a'_n$ sunt impare, iar p este un număr având cifrele de paritate oarecare.

Scăzând din acest număr numărul $p \cdot 10^n$ (și el multiplu de 5^n), obținem numărul $\overline{a'_n a'_{n-1} \dots a'_1}$ care are proprietățile cerute.

13. Dacă o fată stă pe un loc impar, iar alta pe un loc par, atunci între ele se află un număr par de elevi, deci acest caz este exclus.

Dacă ele stau pe numere impare, băieții se vor așeza pe cele pare, deci între doi băieți se vor afla un număr impar de elevi. Iarăși contradicție.

Rămâne de analizat cazul în care fetele stau pe locuri cu numere impare. Atunci băieții stau pe cele cu numere pare și deci între doi băieți se află din nou un număr impar de elevi. Rămâne că așezarea cerută nu se poate realiza.

14. Cu notațiile $x_n = (3 + \sqrt{5})^n$ și $\overline{x_n} = (3 - \sqrt{5})^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, avem:

$$x_n = a_n + b_n \sqrt{5} \text{ și } \overline{x_n} = a_n - b_n \sqrt{5} \text{ cu } a_n, b_n \in \mathbb{N}^*.$$

$$\text{Deci: } x_n = x_n + \overline{x_n} - 1 + (1 - \overline{x_n}) = 2a_n - 1 + (1 - \overline{x_n}).$$

Cum $2a_n - 1 \in \mathbb{N}$ și $1 - \overline{x_n} \in (0, 1)$ deducem

$$[x_n] = 2a_n - 1 \text{ și } \{x_n\} = 1 - \overline{x_n},$$

iar de aici concluzia din enunț.